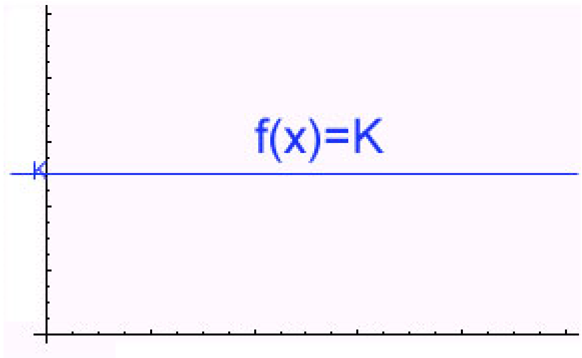
Calcolo delle derivate applicando la definizione di alcune funzioni.

Sia *f(x) = K,* calcoliamo la derivata di tale funzione.



Per definizione la derivata è

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e nel nostro caso:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Quindi

$$f'(k)=0$$

$$D(k)=0$$

Calcoliamo la derivata della funzione *f(x) = x*.

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ovvero nel nostro caso:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$D(x)=1$$

Calcoliamo la derivata della funzione *f(x)=x*^{2}

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ovvero nel nostro caso:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=2x$$

$$D(x^2)=2x$$

La derivata della funzione *f(x)= x^n* $(n \in \mathbb{R})$

Applicando la definizione di si può calcolare la derivata della funzione ***f(x) =x^n***

$$f'(x) = \alpha x^{n-1}$$

$$D(x^n) = \alpha x^{n-1}$$

Applichiamo la definizione di derivata

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tenendo conto che:

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + (n(n-1)/2)x^{n-2}h^2 + \dots\dots\dots + nxh^{n-1} + h^n$$

si ha:

$$\frac{dx^n}{dx} = \lim_{h\to 0}(x+h)^n = \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + (n(n-1)/2)x^{n-2}h^2 + \dots\dots\dots + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \dots\dots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$$

Di seguito proveremo questa regola con il principio di induzione.

Calcoliamo, usufruendo della definizione, la derivata di *f(x)=lnx*

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nel nostro caso *f(x+h)= ln (x+h)* e *f(x) = lnx* pertanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\ln x}{h}$$

Mettiamo in evidenza *x* :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left[x(1+\frac{h}{x})\right]}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\ln x}{h}=$$

Applichiamo la proprietà del prodotto di logaritmi:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})+\ln x}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h}+\cancel{\lim_{h\to 0}\frac{\ln x}{h}}-\cancel{\lim_{h\to 0}\frac{\ln x}{h}}=$$

Semplifichiamo i termini simili e riconosciamo il limite fondamentale nel primo limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

quindi dividiamo e moltiplichiamo per x al denominatore:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}x}=\frac{1}{x}$$

Dunque:

$$D(\ln x)=\frac{1}{x}$$

Calcoliamo la derivata della funzione *f(x) = senx*.

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Nel nostro caso *f(x+h)= sen (x+h)* e *f(x) = senx* pertanto:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=$$

Applichiamo le formule di addizione:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senx\cos h+senh\cos x-sen(x)}{h}=$$

Mettiamo sen x in evidenza:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{senx(\cos h-1)+senh\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senx(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{senh\cos x}{h}$$

Riconosciamo 2 limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senh}{h}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh}{h}=0$$

Quindi:

$$=\lim_{h\to 0}\overset{\boxed{0}}{\frac{senx(\cos h-1)}{h}}-\lim_{h\to 0}\overset{\boxed{1}}{\frac{senh\cos x}{h}}=\cos x$$

$D(senx)=\cos x$